数理解析研究所講究録
1026巻 1998年 180-194

Geometric automorphic forms and spherical functions I

織田孝幸 Takayuki ODA (東大・数理科学)

§0. ひとつの研究分野としての保型形式論の醍醐味は，種々の分野の交錯する上に数論的な華厳の世界を築けるという点にあろう。代数群と不連続群の代数的構造，等質空間とその算術的商の幾何学，局所体上の代数群の表現論の与える解析学，このtrinityの上に実現される希なる華こそ我々の最終的に求めるものである。

だが美しい花を咲かせるには，良い土壌と養分がいる。それなしでは，よい種子から咲く花もいじけたものになってしまう。さて保型形式論の研究の現状をみるとき，多変数の場合は未だ「数論の花」については，つぼみのままという感がする。現状の最も優れた研究も多くは発想が一変数の一般化より出ていて，より美しい高次元特有の美を垣間見ることもまだ十分に出来ていない。

ここでは局所的な球関数の理論・問題を例にとって，必要とされる「土壌と養分」の研究についての課題を見ることにしよう。

§1. 一変数の場合の復習. modular曲線.

多変数の話しを始める前に一変数の場合の基礎となる要の諸結果を簡単に復習しておこう。先ずmodular曲線の定義より始める。

複素上半平面 $\mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ には $SL_2(\mathbb{R})$ が通常のやり方で左から作用していて、$\mathfrak{H} \cong SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ と等質空間になっている。$SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \ (N)\}$ による $\mathfrak{H}$ の商 $\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}$ に尖点 $\Gamma_0(N)\backslash \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ をつけ加えてコンパクト化して、閉Riemann面 $X_0(N) := \{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}\}^*$ を得る。

さて $\mathcal{H}$ をHecke作用素の環とするとき、$\mathcal{H}$ は singular cohomology 群 $H^1_B(X_0(N), \mathbb{Q})$ に作用する。いま簡単のため N は素数とするとき、$T_{\mathbb{Q}}$ で $\mathcal{H}$ の $\mathrm{End}(H^1_B(X_0(N), \mathbb{Q}))$ の中での包絡環とすると、基本的なのは次の事実である。

<u>Fact</u> $H^1_B(X_0(N), \mathbb{Q})$ is a projective $T_{\mathbb{Q}}$-module of rank 2.

これは $X_0(N)$ の Jacobi 多様体 $J_0(N)$ が極大な real multiplication をもち、そういう意味で"楕円曲線に似ている"ことを意味する。

これを証明するには以下に述べるような、いくつかの key points がある。列挙しよう。

(A): Eichler-Shimura 同型 (この場合は Hodge 分解を保型形式の言葉で書く)

$$H^1_B(X_0(N), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = S_2(\Gamma_0(N)) \oplus \overline{S_2(\Gamma_0(N))}.$$

但し，ここで $S_2(\Gamma_0(N))$ は $\Gamma_0(N)$ に属する重さ 2 の正則尖点形式の空間で，これは重さ 1 の Hodge 構造である $H^1_B(X_0(N),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ の (1,0) 成分と同一視される。

(B)：Global multiplicity one (theorem)：つまり $T_{\mathbb{C}}=T_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ は $S_2(\Gamma_0(N))$ に作用するが，これについて $S_2(\Gamma_0(N))$ は rank 1 の自由加群である。

(C)：isotype であること：$T_{\mathbb{C}}$ −加群の同型 $S_2(\Gamma_0(N))\cong\overline{S_2(\Gamma_0(N))}$ が成立する。

(D)：automorphic L-function の理論：elliptic modular forms で Hecke operators の eigenform になっているものに対して，Euler 積をもつ Dirichlet 級数を対応させて，その解析接続・関数等式が積分表示を通して得られる。積分表示はまた色々な幾何学的意味をもつ。

(E)：modular symbols：$X_0(N)$ の尖点同士を path で結んだ chain たちの和によって homology 群 $H_1(X_0(N),\mathbb{Z})$ を生成する。重さ 2 の尖点形式 $f(\tau)\in S_2(\Gamma_0(N))$ に対して，$\omega_f=f(\tau)d\tau$ は $X_0(N)$ の正則 1-型式を定めるが，これの周期積分が f の L-関数 $L(s,f)$

の特殊値で表わされる，等々。これはp進L-関数の構成に応用がある。

先ず以上のメニューを多変数にどのように一般化されているかいないか，から見てみよう。

§2. 多変数の理論の現状．

前節の問についてそれぞれ現状を見てみよう。先ず問題(A)から。

問題(A)： これは'60年代の松島・村上の仕事から順調に進展して来てcocompactな不連続群については一般論は終り，尖点をもつと言う技術的な問題が残っている。あとでこれを考える。

問題(B)： 一般線型群$GL(n)$のときは'70年代にShalikaの結果が出てglobal multiplicity oneは証明された。だが他の代数群，特に有界対称領域に関わる群については，ほとんど何も結果がない。次数2のSiegel modular case $Sp(2)/\mathbb{Q}$の場合でさえダメである。

問題(C)； Selberg跡公式が解答をもたらしてくれると信じられている。しかし$Sp(2)/\mathbb{Q}$の場合でさえ，正しい予想もきちんと定式化されていない。

問題(D): $Sp(2)/\mathbb{Q}$ を例に取る。次数2のsymplectic群 $Sp(2)$ 上のいわゆるSpinor L-関数の構成に限ると次の3つの方法がある。

(i) Andrianov('70年代): 正則保型形式の, Siegel放物物によるFourier展開から出発してL-関数を構成し接続と関数等式を示した。正則でないときに, class 1 の wave forms のときは堀江氏が, 大きな離散系列のときは宮崎琢也氏が ∞ 素点での計算をそれぞれ実行した。

(ii) Novodvorsky('70年代終り): Whittaker模型を使う. 従って正則Siegel modular forms of degree 2 には使えない(Whittaker模型は $\infty=\mathbb{R}$ で 0 になる)。主としてarchimedean primeでの理論が未整備のためglobalな結果は代数体上のときは出来ていない。

(iii) Kohnen–Skoruppa('80年代後半): Rankin–Selberg の convolution method のひとつ。正則Siegel modular形式のときは, 接続と関数等式とが言えている。

このうち次のmodular記号と関連しそうなのは今のところ(i)の方法のみである。

問題(E). X を有界対称領域などにとり, $G=\mathrm{Aut}(X)$ の算術的不連続群 Γ による商のサイクルを $\Gamma\backslash X$ の中で G の部分群 H の軌道として作るのが現在の方法である。主として構成したものが0でないことを示すのが現状の研究の主流である。

つまり問題(A)と(D)はかなり納得のいく結果があるが他は"かなり悲惨な現状"である。(B), (C)について言えば，研究の方針の"提案"はあるが提案者が何か実行することはあまりないようである。(B)については Rogawski が U(2,1) のとき重複度 1 を証明したと Ann. of Math. Studies の本の中で Theorem と書いてあるがこの本の途中は正しくなく 1/3 ほどは書き替えた別の論文がある。現状がどうなっているか確認していないし，いずれにせよ A 型の群である。

ひとつの無理のない方針として我々が考えているのは，最も結果のある(A)に出てくる保型形式に対して(D)の理論をより完成に近付けることである。その過程で出てくる手法や結果を他の問題(B), (C), (E)に役立てようというわけである。そのためにまず(A)の問題の進展状況から見よう。

§3. 松島－村上同型

対称空間の算術的商に対して Eichler－Shimura 同型の一般化を定式化するやり方は二通りある。ひとつは相対 Lie 環コホモロジーの理論を使うやり方で，もうひとつは有界対称領域の算術商が代数多様体になるので，その algebraic de Rham cohomology 群を直接計算するやり方である。後者については，'84 年ごろ cocompact な不連続群のときに survey を書いた。

前者の定式化を思い出そう。これは'60年代の松島－村上の研究に源を発する。A. Borel が'70年代前半に分り易い解説を書いているので，それに従って述べる。

連結半単純Lie群 G とその極大compact部分群 K をひとつ固定し，G の不連続群 Γ は cocompact とする。商 G/K は1点に可縮であるので，コホモジー群の同型 $H^i(\Gamma, \mathbb{C}) = H^i(\Gamma\backslash G/K, \mathbb{C})$ が各 i に対して成立する（Γ は torsion-free とすると易しい）。次に必要なものは"heuristic"にいうと"Shapiroのlemma"の類似である

$$H^i(\Gamma, \mathbb{C}) \cong H^i(G, \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\mathbb{C}))$$

という同型である。ここで右辺を適切に意味があるように考えなければならない。V が G の smooth な表現とするとき，G 上 V に値をもつ differentiable cochains が定義できるので，"可微分"cohomology群 $H^i_d(G, V)$ が定義できる。また $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\mathbb{C})$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ を考え，この中の C^∞-関数全体 $L^2(\Gamma\backslash G)_\infty$ を考え，これに右から G を smooth に正則表現で作用させ $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\mathbb{C})$ の定義とする。このとき"Shapiroのlemma"

$$H^i(\Gamma, \mathbb{C}) \cong H^i_d(G, L^2(\Gamma\backslash G)_\infty)$$

が成立する。$\Gamma\backslash G$ が compact なので $L^2(\Gamma\backslash G)$ は G の既約ユニタリー表現の直和に離散的に有限重複度で分解する(Gelfand–Graev–Piateskii-Shapiro).

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \widehat{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}}} m_\Gamma(\pi) \cdot H_\pi \qquad (m_\Gamma(\pi) < \infty).$$

ここで $H^i(\Gamma, \mathbb{C})$ が有限次元であることを用いて，

補題 (A. Borel) $\quad H^i_d(G, L^2(\Gamma\backslash G)_\infty) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\cdot H^i_d(G, H_{\pi,\infty})$

(但し右辺は有限和)

を示すことが出来る。

さらに van Est spectral sequence より $H^i_d(G, H_{\pi,\infty}) = H^i(\mathfrak{g}, K; H_{\pi,\infty})$ を示せるので,

$$H^i(\Gamma, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\cdot H^i(\mathfrak{g}, K; H_{\pi,\infty})$$

となる。但し，ここで $(\mathfrak{g}, K)$-cohomology 群 $H^i(\mathfrak{g}, K; H_{\pi,\infty})$ は

$\mathfrak{g}$ 上 $H_{\pi,\infty}$ に値をもつ i-chain $C^i(\mathfrak{g}: H_{\pi,\infty})$ の sub space

$$C^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}\ ;\ H_{\pi,\infty})^{(K, Ad)}$$

によって定義される相対 Lie algebra cohomology 群である.

Ad は K の $C^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}; H_{\pi,\infty})$ への adjoint action で，"上付き"はその不変部分空間を表す。次のことが示される。

補題 (松島) 上の仮定の下で，π がユニタリー表現とするとき,

$$H^i(\mathfrak{g}, K; H_{\pi,\infty}) = \begin{cases} \{0\}, & \text{unless } \chi_\pi(C) = \chi_1(C), \\ \mathrm{Hom}_K(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{p}, H_{\pi,K}), & \text{if } \chi_\pi(C) = \chi_1(C). \end{cases}$$

但しここで C は $\mathfrak{g}$ の Casimir operator で，$\chi_\pi : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ は π の infinitesimal character で，χ_1 は trivial 表現のそれとする。$\mathfrak{p}$ は Killing form に関する $\mathfrak{g}$ の中での $\mathfrak{k}$ の直交補空間で Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ より，$\mathfrak{p}\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. よって結局松島－村上同型を得る:

$$H^i(\Gamma, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\substack{\pi\in\hat{G}\\ \chi_\pi(C)=\chi_1(C)}} m_\Gamma(\pi)\,\mathrm{Hom}_K(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{p}, H_{\pi,K}).$$

ここで次のことが問題となる。

<u>問題</u>　$\chi_\pi(C)=\chi_1(C)$ かつ $\mathrm{Hom}_K(\wedge^i\mathfrak{g}, H_{\pi,K})\neq\{0\}$ となる $\pi\in\hat{G}$ を数え挙げよ。

これはKumaresan, 後にVogan–Zuckerman によって '84 Compo. Math によって完全に解決された。

<u>例</u>　$G=Sp(2;\mathbb{R})$ とし $i=3$ としよう。このとき $H^3(\mathfrak{g},K;H_{\pi,K})\neq\{0\}$ となる $\pi\in\hat{G}$ は4つある。それを $D^{(3,0)}, D^{(2,1)}, D^{(1,2)}, D^{(0,3)}$ と書く。いずれも離散系列というGの表現の類の中で行列係数が自乗可積分な重要な族に属する。$m_\Gamma(\pi)=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G))$ であるので、

$$H^3(\Gamma,\mathbb{C})=\bigoplus_{\pi\in\{D^{(i,j)}\mid i+j=3\}}\{\mathrm{Hom}_K(\wedge^3\mathfrak{g}, H_{\pi,K})\otimes\mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G))\}$$

という分解がある。$\mathrm{Hom}_K(\wedge^3\mathfrak{g}, H_{\pi,K})$ はいずれも一次元なので、

結局

$$H^3(\Gamma,\mathbb{C})\cong\bigoplus_{\pi\in\{D^{(i,j)}\mid i+j=3\}}\mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G))$$

となる。$\pi=D^{(3,0)}$ のとき $\mathrm{Hom}_G(D^{(3,0)}, L^2(\Gamma\backslash G))$ は重さ3の正則 "Siegel" modular cusp forms w.r.t. Γ, $S_3(\Gamma)$ と自然に同一視される。同様に $\mathrm{Hom}_G(D^{(0,3)}, L^2(\Gamma\backslash G))$ は Γ に属する重さ3の反正則モジュラー形式の空間と同一視される。$\mathrm{Hom}_G(D^{(2,1)}, L^2(\Gamma\backslash G))$ が新しい高次元的な部分で"調和的"であるが正則でも反正則でもない保型形式である。

ここで考えているような $H_d^i(G, H_\pi) = H^i(\mathfrak{g}, K; H_{\pi,\infty}) \neq \{0\}$ となる i が存在するような表現 (π, H_π) を cohomological な表現と呼ぶ。実はもっと一般に，G のある有限次元表現 (ρ, F_ρ) に対してある i があって $H^i(\mathfrak{g}, K; F_\rho^* \otimes_{\mathbb{C}} H_{\pi,\infty}) \neq \{0\}$ となる，より一般のものを考えるべきであるが（このとき対応する松島－村上同型の左辺は $H^i(\Gamma, F_\rho)$ となる…），ここでは略する。cohomological な表現の中でも離散系列表現は "generic" なもので最も重要である。これ以外は non-tempered で Gelfand－Kirillov 次元が小さく，表現空間の小さな表現になり実解析的に扱い易い点がある。

Γ が cocompact でないとき $L^2(\Gamma\backslash G)$ は連続スペクトルをもつ。$L^2(\Gamma\backslash G)$ の discrete part は $L^2(\Gamma\backslash G)_d = \overline{\sum_{\substack{\pi\in\hat{G} = \text{既約ユニタリー} \\ H_\pi \subset L^2(\Gamma\backslash G)\text{, 閉部分表現}}} H_\pi}$ と定義される。但し，$\overline{}$ は閉包である。

$L^2(\Gamma\backslash G)_d$ の直交補空間を $L^2(\Gamma\backslash G)_c$ と書くと，$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2(\Gamma\backslash G)_d \oplus L^2(\Gamma\backslash G)_c$。$G/K$ が G－不変な複素構造をもち有界対称領域であるとき Borel－Casselmann によって $L^2(\Gamma\backslash G)_c$ は $(\mathfrak{g}, K)$－cohomology に寄与しないことが示されている。Γ が算術的のとき，松島－村上同型は，Borel－Casselmann によって一般化され

$$IH^i(\Gamma\backslash G/K, \mathbb{C}) = H^i(\mathfrak{g}, K; L^2(\Gamma\backslash G)_{d,\infty})$$
$$= \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} \{H^i(\mathfrak{g}, K; H_{\pi,\infty}) \otimes \mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G)_d)\}$$

となる。但し，IH^i は代数多様体 $\Gamma\backslash G/K$ の middle perversity の intersection cohomology である。

§4. 一般化された球関数.

さて我々の関心はcohomologicalな保型形式，あるいはより限定して離散系列の保型形式である。自乗可積分な保型形式についてはこれは次のように定義される。

$f \in L^2(\Gamma\backslash G)$ とし，これを右移動して考える。このfが右からK-finiteで，C^∞-関数で $\mathfrak{g}$ のenveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ に関して $Z(\mathfrak{g})$-finiteであり，さらに"∞で" moderate growthのとき保型形式と呼ぶ。fの右移動が生成する$(\mathfrak{g}, K)$-加群を V_f と書く。これが Gの表現 π の $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $H_{\pi,K}$ と同型であるとき fは表現πに属するという。 πがcohomological，あるいはdiscrete seriesのとき，fもそうであるという。

さてそのようなfについて例えば問題(F)のL-関数の理論を完全な形，応用できる形にしておくことは重要である。ところがL-関数の構成には，しばしば保型形式の種々の展開とりわけFourier展開が基本的である。しかし残念ながら現状は正則保型形式を除いて我々は保型形式のFourier展開の内実のある結果をほとんど手にしていない。

まず最初にFourier展開に必要な特殊関数を調べることにするとき問題を次のように定式化できる。

有限の中心をもつ実半単純Lie群 Gの閉部分群Rを一つえらぶ。ξをRの既約unitary表現か，それに附随するsmoothな

表現とする。$\mathrm{Ind}_R^G(\xi)$ を smooth な圏での誘導表現とする。G の既約な smooth 表現 とするとき絡空間

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_R^G(\xi)) \text{ あるいは } \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, \mathrm{Ind}_R^G(\xi))$$

の元 T $(\neq 0)$ と π の実現である Image(T) を考える。Image(T) の元 φ たちが generalized spherical functions である。

例 $R=N$ が G の maximal unipotent subgroup で，ξ が $R=N$ の非退化指標のとき上の絡空間の元 T は Whittaker functional であり，Image(T) は π の Whittaker 模型（あるいは実現）である。

この種の問題には Whittaker 模型の場合等限られた特別な場合以外あまり研究がない。我々は特に $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, \mathrm{Ind}_R^G(\xi))$ が有限次元となる $(G, \pi\,;\, R, \xi)$ に興味がある。ξ が無限次元表現になるときはかなり最近まで一般的な研究はなかった。ただ，R が reductive のとき Bien－小林－大島によって絡空間が有限次元になる十分条件が得られている。

群が"小さい"とき，φ の動径部分の明示公式が最近得られている（$G=SU(n,1)$，$=Sp(2,\mathbb{R})$，$=SU(2,2)$ など）。そして問題(B)の L-関数の構成の実素点での理論に応用されている。さらに Selberg 跡公式（問題(C)に関連している）への応用も期待される。与えられた枚数を越えつつあるので，これら case study を簡単に紹介してこの文を了る。

§5. 種々の結果

<SU(n,1)について> Whittaker関数の明示公式は古関―織田[KsO]が$n=2$のとき，谷口健二がnが一般のとき得た。$R=N$であるがξが∞次元のとき（つまりHeisenberg群NのSchrödinger表現のとき），$n=2$は石川佳宏によって明示公式が得られ，Fourier展開の一般的な形も定まった。都築は$R=S(U(1)\times U(n-1,1))$のときの球関数の明示公式を得，村瀬―菅野のL関数の構成の実素点の研究を$U(n,1)$のとき完成した（後半は準備中，前半はプレプリント）。解空間の次元が1以下も一般的に示している。

<Sp(2;R)> Rとしていろいろな可能性がある。$R=N$，ξが指標であるWhittaker modelのときはπがlarge discrete seriesのとき，[O2]で織田が明示公式を得た。RがSiegel parabolic subgroup P_Sのunipotent radicalと$SO(2)$の半直積のとき，宮崎([M1])はπがlarge discrete seriesとP_J-principal seriesのとき，明示公式を得，Andrianov構成のL-関数の実素点の研究をこのπについて完成した。最近，平野幹は博士論文でRがJacobi群のときを調べ，明示公式と重複度$\leqq 1$を得ている。但しπはP_J-principal seriesとlarge discrete seriesである。飯田の行列係数の研究も興味深い。

<SU(2,2)> 書くスペースがなくなったが，Whittakerのときは早田孝博が，Siegel型のgeneralized Whittaker functionは権が詳細な結果を得ている。（終）

注1. 講演では小林さんとの共同研究[KO]にもふれた。スペースの問題と他の集会でも話したので、これは略した。
注2. 最近 $SU(2,2)$ の大-離散列と"中間の"離散系列の行列係数も明示的に計算できた。(それぞれ、古関氏、古関-早田の両氏との共同研究)

文献表

[BKO] Bien, F.、小林俊行、大島利男：Multiplicities of induced representations of semisimple Lie groups. Preprint 1996

[B1] Borel, A.：Cohomologie de sous-groupes discrets et représentations de groupes semi-simples. Astérisque **32-33** (1976),73-112

[BW] Borel, A.、Wallach, N.：Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Annals of Math. Studies **94**, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, 1980

[D1] Deligne, P.：Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. Proceedings of symp.in pure math. **33-2** (1979), 313-346 Automorphic Forms, Representations, and L-functions

[HS] 広中由美子、佐藤文広：Eisenstein series on reductive symmetric spaces and representations of Hecke algebras. J. reine u. angew. Math. **445** (1993), 45-108

[Id] 飯田正敏： Spherical functions of the principal series representations of $Sp(2,\mathbf{R})$ as hypergeometric functions of C_2-type. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 689-727

[Is] 石川 佳宏： The generalized Whittaker functions for $SU(2,1)$ and the Fourier expansions of automorphic forms. In press, to appear in Comp. Math. (東大数理博士論文97年3月)

[KO] 小林俊行、織田孝幸： A vanishing theorem for modular symbols on locally symetric spaces. In press, to appear in Comm. Math. Helvetici.

[KsO] 古関春隆、織田孝幸：Whittaker functions for the large discrete series representations of $SU(2,1)$ and related zeta integrals. Publ. of RIMS, Kyoto Univ. **31** (1995), 959-999

[MM1] 松島与三・村上信吾：
[MM2] 〃 ：
[MM3] 〃 ：
[MM4] 〃 ：
上の[BW]のreferenceをごらん下さい

[MS1] 村瀬篤、菅野孝史：

[MS2] 村瀬篤、菅野孝史：

[M1] 宮崎 琢也： The generalized Whittaker functions for $Sp(2;R)$ and the gamma factor of the Andrianov L-function. Preprint RIMS-1053 (京大数理研博士論文96年3月)

[Mo] 森山知則：Spherical functions w.r.t. semisimple symmetric pair $(Sp(2,\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{R})^2)$

[N1] 成田宏秋：Fourier expansion of Siegel modular forms of degree 2 w.r.t. minimal parabolic subgroup.

[O1] 織田孝幸： Advanced Studies in pure math. vol. 8 の survey (1984)

[O2] 織田 孝幸： An explicit integral reprentation of Whittaker functions on $Sp(2;R)$ for the large discrete series representations. Tôhoku Math. J. **46** (1994), 261-279

[S] Schmid, W.: Rice University Studies (1994 or 1997)

[T1] 谷口健二： 東京大学・数理科学 紀要. 1996.

[Tz1] 都築 正男： Real Shintani functions and multiplicity free property for the symmetric pair $(SU(2,1), S(U(1,1) \times U(1))$. In press, to appear in Journ. of Math.-Sci., Univ. of Tokyo

[Tz2] 都築 正男: Real Shintani functions for a symmetric pair $(U(n,1), U(n-1,1) \times U(1))$. Preprint UTMS 96-44 (東大数理96年10月)

[VZ] Vogan, D. and Zuckerman, G.: — : Compositio math (1984).

[Y1] 山下博 :
[Y2] 山下博 : } 京大紀要. [O2]の文献表を見て下さい。